به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

فصل دوم-مفهوم حد

آنچه در این کاربرگ می‌بینید، تدقیق مفهوم حد است که در دبیرستان با آن آشنا شده‌اید و به کار برده‌اید. در این کاربرگ به طور اجمالی تعریف‌ها و قضیه‌ها بیان شده و با ذکر چند مثال بررسی می‌شوند.

تعریف ۱. بازه (باز) محذوف حول نقطه a مجموعه‌ای است به شکل

$$\{x : a - \delta_1 < x < a\} \cup \{x : a < x < a + \delta_2\}$$

که در آن δ_1 و δ_2 اعدادی مثبت و داده شده‌اند. به‌ویژه بازه محذوف به شعاع δ ($\delta > 0$) حول a مجموعه زیر است:

$$\{x : 0 < |x - a| < \delta\}.$$

تعریف ۲ (نقاط حدی)**.** فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد. نقطه $a \in \mathbb{R}$ را یک نقطه حدی S می‌نامیم، هرگاه به ازای هر عدد مثبت مانند δ، بازه **محذوف** به شعاع δ حول a شامل نقطه‌ای از S باشد.

فعالیت ۱.

الف) فرض کنید $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. نشان دهید که ۰ نقطه حدی S است.

ب) نقاط حدی $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ را بیابید.

ج) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ باشد. نشان دهید S هیچ نقطه حدی‌ای در $\mathbb{R}$ ندارد.

د) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت $a \in \mathbb{R}$ نقطه‌ای حدی برای S است اگر و تنها اگر دنباله‌ای از نقاط متمایز S وجود داشته باشد که به a همگراست.

تعریف ۳ (تعریف حد). فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$، a نقطه‌ای حدی برای S و $f : S \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. می‌گوییم حد تابع f وقتی x به a میل می‌کند برابر با L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

در صورتی که به ازای هر عدد مثبت مانند e عددی مثبت مانند δ وجود داشته باشد که اگر $x \in S$ و $0 < |x-a| < \delta$، آنگاه $|f(x) - L| < e$.

گزاره ۴. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و a نقطه‌ای از S باشد که نقطه حدی S نیز هست. در این صورت تابع $f : S \to \mathbb{R}$ در نقطه a پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد و برابر با $f(a)$ باشد.

گزاره ۵. حد تابع در صورت وجود یکتا است.

گزاره ۶. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$، a نقطه‌ای حدی از S و $f : S \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در این صورت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله از عضوهای S مانند (a_n) که به ازای هر n، $a_n \neq a$ و $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$، دنباله $(f(a_n))$ به L همگرا باشد.

فعالیت ۲.

الف) نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n، حد زیر وجود دارد و مقدار آن را بدست آورید.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

ب) حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta}$$

راهنمایی: برای حد اول داریم:

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta, \quad \theta > 0$$
$$\tan\theta < \theta < \sin\theta, \quad \theta < 0.$$

برای حد دوم داریم: $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$.

ج) برای $n \geq 0$ حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to 0} x^n \sin\frac{1}{x}$$

تعریف ۷ (تعریف حد در بی‌نهایت). می‌گوییم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ اگر به ازای هر عدد مثبت مانند e، عددی حقیقی مانند M وجود داشته باشد که به ازای هر x در دامنه f که $x > M$، $|f(x) - L| < e$.

توجه کنید که لااقل باید یک دنباله مانند a_n از دامنه f یافت شود که $a_n \to +\infty$؛ به عبارت دیگر باید $+\infty$ یک نقطه حدی دامنه f باشد.

تعریف ۸ (تعریف حد بی‌نهایت). می‌گوییم $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ اگر a نقطه حدی S، دامنه تعریف f، باشد و داشته باشیم برای هر عدد $M > ۰$، عددی مثبت مانند δ یافت می‌شود که به ازای هر x در S که $۰ < |x-a| < \delta$، $f(x) > M$.

فعالیت ۳. حد زیر را برای m و nهای طبیعی بررسی کنید.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_۰ + a_۱x + \cdots + a_mx^m}{b_۰ + b_۱x + \cdots + b_nx^n}$$

تعریف ۹ (تعریف حد چپ و راست). فرض کنید تابع $f : S \to \mathbb{R}$ داده شده و a عددی حقیقی باشد. دو مجموعه

$$S^- = \{x \in S : x < a\}$$

$$S^+ = \{x \in S : x > a\}$$

را در نظر می‌گیریم. اگر a نقطه حدی S^- باشد، آنگاه حد چپ تابع f وقتی x در S^- به a میل می‌کند قابل مطرح کردن است و آن را با نماد $\lim_{x\to a^-} f(x)$ نمایش می‌دهند. به همین ترتیب اگر a نقطه حدی S^+ باشد، حد راست تابع f وقتی x در S^+ به a میل می‌کند قابل مطرح کردن است و آن را با نماد $\lim_{x\to a^+} f(x)$ نمایش می‌دهند.

فعالیت ۴. در هر مورد درباره وجود حد داده شده تحقیق کنید.

$$\lim_{x\to ۱^+} \lfloor x \rfloor \lfloor \frac{۱}{x} \rfloor$$

$$\lim_{x\to ۱^-} \lfloor x \rfloor \lfloor \frac{۱}{x} \rfloor$$

$$\lim_{x\to ۰^+} \left(\frac{۱}{x} - \lfloor \frac{۱}{x} \rfloor \right)$$

$$\lim_{x\to ۰^+} \left(۱ - x\lfloor \frac{۱}{x} \rfloor \right)$$